Районный тур 2017. 11 класс. Решения.

Задача 1. I вариант.

Из рисунка к условию понятно, что ни одна из мышек в начальной точке не видит сыр. Построим изображение сыра в каждом зеркале. Чтобы сделать это, следует воспользоваться стандратным рецептом: опустить из точки, где находится сыр, перпендикуляр на плоскость зеркала и продлить настолько же этот перпендикуляр за зеркало.

При построении И1 (изображения сыра в левом зеркале) и при построении И2 (в правом) приходится продлить линию, изображающую зеркала (см. рис. 1). Тот факт, что перпендикуляры опущены не на сами зеркала, а на их продолжения, никак не повлияет на расположение изображения. Действительно, размер зеркала повлияет лишь на то, *откуда* можно увидеть изображение. Так, в нашем случае сыр можно увидеть только из области, куда попадают отраженные от зеркала лучи (см. рис. 2), а, например, в точке, где расположен сам сыр, сыр в зеркале не видно. Другими словами, зеркало играет роль "окна", через которое наблюдатель словно бы пытается рассмотреть изображение за зеркалом. Маленький размер этого "окна" приводит к тому, что "заглянуть за зеркало" можно не отовсюду. Однако, независимо от того, где видно отражённые лучи, а где нет, они отражаются так, словно вышли из точки И2 за зеркалом.

Итак, в начале момент мышь 1 бежит к точке И2, а мышь 2 — к точке И1. Далее, в некоторый момент (свой для каждой мыши) сыр покажется из-за края зеркала. В этот момент по условию задачи мышь свернёт и побежит прямо к зеркалу. На рис. 1 жирной серой линией показана траектория движения каждой мыши.

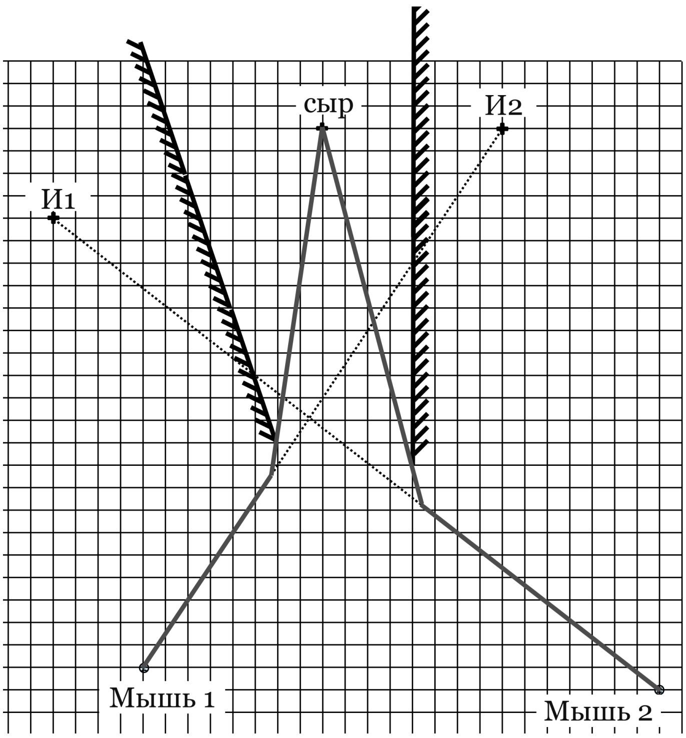


Рис. 1:

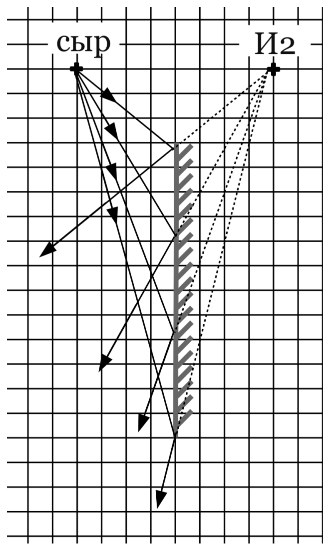


Рис. 2:

Осталось лишь взять линейку, померить длину траектории каждой мыши (S_1 и S_2) и разделить бо́льшую из полученных длин на меньшую. Так как мыши бегут с одинаковой скоростью отношение длин траекторий будет равно отношению времен, за которые мыши достигнут сыра.

Измерять длины трактрорий можно в любых единицах (миллиметрах или клеточках). Наши измерения дают

$$k = \frac{S_2}{S_1} \simeq 1.18$$

Погрешность аккуратно проведённых измерений может составлять около 5% (не более 5 миллиметров на 10 сантиметров). За правильный ответ засчитывались значения k, лежащие в интервале $[1.1, 1.25]$.

<u>Ответ</u>: Первая мышь прибежит быстрее, время ее движения будет примерно в $k = 1.2$ раза меньше, чем у второй мыши. За правильный ответ засчитываются значения k, лежащие в интервале $[1.1, 1.25]$

Задача 2. I вариант.

Обозначим искомое давление на изобаре 1-2 через p, а искомый объём на изохоре 2-3 через V.

По условию теплота, полученная газом на изобаре 1-2, равна Q. С другой стороны она равна $C_p(T_2 - T_1) = 5\nu R(T_2 - T_1)/2$, так как газ нагрелся на $T_2 - T_1$, и в изобарическом процессе одноатомный газ имеет теплоёмкость $C_p = 5\nu R/2$. Так как температуры в задаче не спрашиваются, удобно выразить T_1 и T_2 через давления и объёмы с помощью уравнений Клапейрона-Менделеева, записанных для газа в точках 1 и 2:

$$pV_1 = \nu RT_1, \qquad pV = \nu RT_2.$$

Отсюда

$$Q = \frac{5(\nu RT_2 - \nu RT_1)}{2} = \frac{5p(V - V_1)}{2} \qquad \Rightarrow \qquad p(V - V_1) = \frac{2Q}{5} \tag{1}$$

Запишем теперь условие, что линия 3-1 является изотермой

$$pV_1 = p_3V. \tag{2}$$

Решим совместно систему уравнений (1, 2) относительно p и V. Например, разделим уравнение (1) на уравнение (2), исключив тем самым p,

$$\frac{V - V_1}{V_1} = \frac{2Q}{5p_3V} \qquad \Rightarrow \qquad V(V - V_1) = \frac{2Q}{5p_3V_1} \qquad \Rightarrow \qquad V^2 - V_1V - \frac{2Q}{5p_3V_1} = 0.$$

Решая квадратное уравнение относительно V, находим

$$V = \frac{V_1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{8Q}{5p_3V_1}}\right).$$

Понятно, что ответ для V должен быть положительным, поэтому из двух корней следует оставить лишь положительный. Осталось лишь найти p из (2):

$$p = \frac{p_3V}{V_1} = \frac{p_3}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8Q}{5p_3V_1}}\right).$$

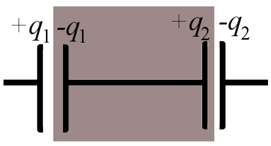
Ответ: Давление в точках 1 и 2 равно $p = p_3(1 + \sqrt{K})/2$, объём в точках 2 и 3 равен $V = V_1(1 + \sqrt{K})/2$, где $K = 1 + 8Q/(5p_3V_1)$.

Задача 3. I вариант.

Пусть до замыкания ключа напряжение на конденсаторе $6C$ было U_1, а напряжение на конденсаторе $3C$ было U_2. Понятно, что $U_1 + U_2 = U$.

На последовательно соединённых конденсаторах, включенных в цепь постоянного напряжения, всегда устанавливаются равные заряды. Действительно, предположим, что это не так, и что заряды разные (q_1 и q_2, см. рис. 3). Рассмотрим выделенные серым на рисунке пластины. Они изолированы от источника, значит суммарный заряд их должен быть нулевым, т.е. $q_1 = q_2 = q$.

Если ключ разомкнут, в схеме имеется цепочка таких последовательно соединённых конденсаторов ёмкостью $6C$ и $3C$ (точнее, даже две таких цепочки). Каждую такую цепочку можно мысленно заменить ёмкостью C_0 — так, чтобы на еонденсаторе C_0 было такое же напряжение $U_1 + U_2 = U$ как на рассматриваемой цепочке и такой же заряд $q = C_0 U$. Тогда



$$U_1 + U_2 = U, \qquad \text{где} \qquad U_1 = \frac{q}{6C} \qquad U_2 = \frac{q}{3C} \qquad U = \frac{q}{C_0},$$

Рис. 3:

откуда следует хорошо известная формула для последовательно соединённых конденсаторов

$$\frac{1}{6C} + \frac{1}{3C} = \frac{1}{C_0}.$$

Это позволяет найти $C_0 = 2C$ и $q = C_0 U = 2CU$.

Зная q, найдём

$$U_1 = \frac{q}{6C} = \frac{2CU}{6C} = \frac{U}{3}, \qquad U_2 = \frac{q}{3C} = \frac{2CU}{3C} = \frac{2U}{3}.$$

Когда ключ замыкают, перемычка с амперметром и сопротивлением соединяет собой точки с неравным потенциалом: точка между верхними конденсаторами имеет потенциал на U_1 меньше, чем крайняя левая точка схемы; точка между нижними конденсаторами имеет потенциал на U_2 меньше, чем крайняя левая точка схемы. Разность потенциалов на сопротивлении, таким образом, в момент замыкания ключа составляет $|U_1 - U_2| = U/3$, поэтому в первый момент потечёт ток

$$I = \frac{U}{3R} = 10 \text{ mA}$$

Ответ: 10 миллиампер.

Задача 4. I вариант.

При выстреле ковбой вместе с каруселью приобретают скорость u и импульс Mu (мы обозначили через M суммарную массу ковбоя и обода карусели). Пуля при этом приобретает противоположный импульс, равный mV (V – горизонтальная скорость пули). По условию $m = \alpha M$.

Понятно, что импульсы Mu и mV связаны между собой и равны по модулю: по третьему закону Ньютона сила, с которой пуля в каждый момент толкает назад револьвер, равна силе, с которой револьвер толкает пулю; поэтому импульсы, которые приобретает под действием этих равных сил пуля и револьвер с ковбоем и каруселью в пренебрежении трением одинаковы. Итак,

$$Mu = mV \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{mV}{M} = \alpha V.$$

Так как пуля движется с начальной скоростью V, которая направлена горизонтально, за время t она пролетит по горизонтали путь $L = Vt$, а по вертикали опустится на $gt^2/2$. По условию именно там находится мишень.

Во время второго выстрела карусель приобретет дополнительный импульс. Вылет пули будет осуществляться по тем же законам, но поскольку в начальный момент карусель двигалась с горизонтальной скоростью u, законы эти имеют такую же форму, если мы перейдём в систему отсчёта, где карусель не вращается. В неподвижной же системе отсчёта вторая пуля полетит после выстрела с горизонтальной скоростью $V - u$. По горизонтали она доберется до мишени за время

$$t' = \frac{L}{V-u} = \frac{Vt}{V-u} = \frac{t}{1-\alpha},$$

здесь мы учли связь $u = \alpha V$.

Понятно, что $t' > t$, то есть вторая пуля летит медленнее и дольше. Значит, и опустится за время полёта она сильнее, чем в первом случае – на расстояние $gt'^2/2$. По сравнению со сдвигом вниз первой пули, это больше на

$$\Delta x = \frac{gt'^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2}\left(\frac{t^2}{(1-\alpha)^2} - t^2\right) = \frac{gt^2}{2}\left(\frac{1-(1-\alpha)^2}{(1-\alpha)^2}\right) = \frac{gt^2\alpha}{2}\left(\frac{2-\alpha}{(1-\alpha)^2}\right).$$

Так как величина α мала по условию, в числителе можно отбросить α по сравнению с двойкой, а в знаменателе – α по сравнению с единицей.

<u>Ответ</u>: пуля пройдёт ниже центра мишени на $\Delta x = gt^2\alpha$.

Задача 5. I вариант.

Грузы, расположенные на рычаге, скорее всего не будут уравновешены, $ML \neq ml$ (случай уравновешенных грузов надо рассматривать отдельно). Разумно предположить, что тот груз, который перевешивает на неподвижном рычаге, будет крутиться по нижней окружности, а второй – по верхней. Будем для определенности считать, что $ML > ml$, так что груз M расположился внизу.

На каждый из двух грузов будет действовать четыре силы: сила тяжести (Mg или mg – в зависимости от того, который груз рассматриваем), сила Лоренца ($F_{\Lambda\,1}$ или $F_{\Lambda\,2}$), сила со стороны стержня, направленная вдоль него (N_1 или N_2), сила со стороны стержня, направленная перпендикулярно стержню F_1 или F_2.

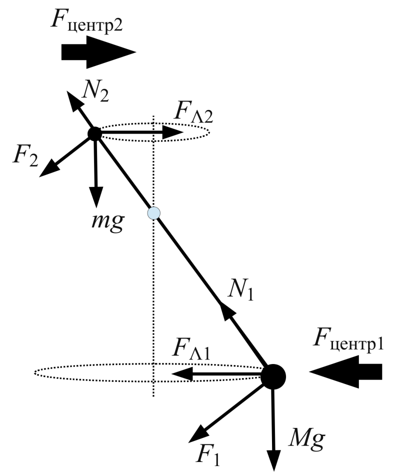


Рис. 4:

Силы на каждый из грузов представлены на рис. 4. Для определённости мы считаем, что нижний шарик движется "на нас", а верхний – "от нас". В случае, если система вращается в другую сторону, направления сил $F_{\Lambda\,1}$ или $F_{\Lambda\,2}$ изменятся по сравнению с рисунком на противоположные (этого же можно добиться, изменив направление B на противоположное). Направление центростремительных сил указано на рисунке жирными стрелками.

Так как каждый груз движется по горизонтальной окружности, сумма действующих на него сил должна складываться в результирующую, направленную к центру этой окружности (центростремительную силу):

$$M\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_1 + \vec{F}_{\Lambda\,1} = \vec{F}_{\text{центр}\,1}$$

$$m\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{\Lambda\,2} = \vec{F}_{\text{центр}\,2}$$

Удобно рассмотреть эти равенства в проекции на направление, перпендикулярное стержню:

$$Mg\sin\alpha + F_1 + F_{\Lambda\,1}\cos\alpha = F_{\text{центр}\,1}\cos\alpha,$$

$$-mg\sin\alpha - F_2 + F_{\Lambda\,2}\cos\alpha = F_{\text{центр}\,2}\cos\alpha,$$

здесь мы обозначили искомый угол между стержнем и вертикалью через α.

В последних формулах силы N_1 и N_2 не дали вклада, так как мы рассмотрели перпендикулярное им направление. Силы же F_1 и F_2 связаны между собой соотношением $F_1L = F_2l$. Действительно, такие же по величине силы и противоположные по направлению силы действуют со стороны грузов на стержень. Стержень же закреплён на шарнире и должен пребывать в равновесии. Значит моменты сил F_1 и F_2 должны быть скомпенсированы. Это соотношение позволит нам исключить из рассматриваемой системы силы F_1 и F_2. Домножим первое уравнение на L, второе на l, и сложим уравнения друг с другом. Вклады $F_1L - F_2l$ сократятся, останется

$$(ML - ml)g\sin\alpha + (F_{\Lambda\,1}L + F_{\Lambda\,2}l)\cos\alpha = (F_{\text{центр}\,1}L + F_{\text{центр}\,2}l)\cos\alpha. \qquad (3)$$

Теперь осталось только выразить силу Лоренца и центростремительную силу через параметры системы. Для этого введём радиус окружности, по которой вращается каждый груз,

$$R_1 = L\sin\alpha, \qquad R_2 = l\sin\alpha$$

и вспомним, что скорость движения груза равна произведению угловой скорости ω на этот радиус. Для силы Лоренца

$$F_{\Lambda\,1} = QB\omega L\sin\alpha, \qquad F_{\Lambda\,2} = qB\omega l\sin\alpha.$$

Для центростремительной силы

$$F_{\text{центр}\,1} = M\omega^2 L\sin\alpha, \qquad F_{\text{центр}\,2} = m\omega^2 l\sin\alpha.$$

Подставляя эти силы в (3), получим

$$(ML - ml)g\sin\alpha + B\omega\sin\alpha(QL^2 + ql^2)\cos\alpha = \omega^2\sin\alpha(ML^2 + ml^2)\cos\alpha.$$

У этого уравнения имеется, во-первых, решение $\sin\alpha = 0$, а во-вторых, корни уравнения

$$(ML - ml)g + B\omega(QL^2 + ql^2)\cos\alpha = \omega^2(ML^2 + ml^2)\cos\alpha, \tag{4}$$

из которого легко выразить

$$\cos\alpha = \frac{(ML - ml)g}{\omega^2(ML^2 + ml^2) - B\omega(QL^2 + ql^2)} = \frac{(2L - l)mg}{m\omega^2(2L^2 + l^2) - qB\omega(3L^2 + l^2)}. \tag{5}$$

Последнее уравнение решается только если

$$0 \le \frac{(ML - ml)g}{\omega^2(ML^2 + ml^2) - B\omega(QL^2 + ql^2)} \le 1.$$

Знак при слагаемом с B может меняться в зависимости от того, по или против часовой стрелки вращаются грузы. Знаменатель в рассматриваемой дроби при достаточно малых ω может быть отрицательным, или слишком малым, чтобы наше неравенство выполнялось. Тогда реализуется решение $\sin\alpha = 0$ (оно же является устойчивым).

С ростом ω у уравнения (5) появляется нетривиальное устойчивое решение, в то время как $\alpha = 0$ становится неустойчивым.

Если заряды вращаются как мы предположили (нижний на нас, верхний – от нас), это происходит при

$$(ML - ml)g = \omega^2(ML^2 + ml^2) - B\omega(QL^2 + ql^2),$$

т.е. при критическом значении ω_{kp}, найденной из квадратного уравнения

$$\omega^2(ML^2 + ml^2) - B\omega(QL^2 + ql^2) - (ML - ml)g = 0, \qquad \Rightarrow$$

$$\omega_{kp} = \frac{B(QL^2 + ql^2) + \sqrt{B^2(QL^2 + ql^2)^2 + 4(ML^2 + ml^2)(ML - ml)g}}{2(ML^2 + ml^2)} =$$

$$= \frac{qB(3L^2 + l^2) + \sqrt{q^2B^2(3L^2 + l^2)^2 + 4m^2(2L^2 + l^2)(2L - l)g}}{2m(2L^2 + l^2)}$$

(отрицательное решение для ω_{kp} отброшено).

Дальнейший рост ω при значениях больших ω_{kp} приведёт к росту знаменателя в (5) и, соответственно, увеличению равновесного угла α.

Если заряды вращаются наоборот (нижний от нас, верхний – на нас), стержень остаётся вертикальным вплоть до угловых скоростей

$$\tilde{\omega}_{kp} == \frac{-qB(3L^2 + l^2) + \sqrt{q^2B^2(3L^2 + l^2)^2 + 4m^2(2L^2 + l^2)(2L - l)g}}{2m(2L^2 + l^2)}$$

(данное решение проще всего получить, заменив в ω_{kp} знак у слагаемых с B.

В случае, когда исходно невращающиеся грузы уравновешены на шарнире (когда $ML = ml$) угол в уравнении (4) вообще сокращается, так что равновесие имеет место при любом расположении стержня, однако частота вращения при этом единственно возможная. Можно, однако, показать. что устойчивое вращение происходит лишь при $\alpha = 0$ и $\alpha = 90°$. Для этого следует при произвольном α рассмотреть малое изменение α на $\Delta\alpha$ и убедиться, что силы в (5) изменяются так, чтобы усилить отклонение стержня.

Ответ: Если заряды вращаются так – нижний на нас, верхний – от нас, при $\omega < \omega_{kp}$ стержень вертикален, при больших значениях угол задается соотношением (5).

Если заряды вращаются в обратную сторону, при $\omega < \tilde{\omega}_{kp}$ стержень вертикален, а при больших значениях угол задается соотношением (5) в котором следует изменить знак у B.

В случае, когда $2L = l$, стержень находится в безразличном неустойчивом равновесии и может вращаться под любым углом. Устойчивое положение стержня в этом случае – вертикальное либо горизонтальное.

Задача 1. II вариант.

Из рисунка к условию понятно, что ни одна из мышек в начальной точке не видит сыр. Построим изображение сыра в каждом зеркале. Чтобы сделать это, следует воспользоваться стандратным рецептом: опустить из точки, где находится сыр, перпендикуляр на плоскость зеркала и продлить настолько же этот перпендикуляр за зеркало.

При построении И1 (изображения сыра в левом зеркале) и при построении И2 (в правом) приходится продлить линию, изображающую зеркала (см. рис. 5). Тот факт, что перпендикуляры опущены не на сами зеркала, а на их продолжения, никак не повлияет на расположение изображения. Действительно, размер зеркала повлияет лишь на то, *откуда* можно увидеть изображение. Так, в нашем случае сыр можно увидеть только из области, куда попадают отраженные от зеркала лучи (см. рис. 6), а, например, в точке, где расположен сам сыр, сыр в зеркале не видно. Другими словами, зеркало играет роль "окна", через которое наблюдатель словно бы пытается рассмотреть изображение за зеркалом. Маленький размер этого "окна" приводит к тому, что "заглянуть за зеркало" можно не отовсюду. Однако, независимо от того, где видно отражённые лучи, а где нет, они отражаются так, словно вышли из точки И1 за зеркалом.

Итак, в начале момент мышь 1 бежит к точке И2, а мышь 2 — к точке И1. Далее, в некоторый момент (свой для каждой мыши) сыр покажется из-за края зеркала. В этот момент по условию задачи мышь свернёт и побежит прямо к зеркалу. На рис. 5 жирной серой линией показана траектория движения каждой мыши.

Осталось лишь взять линейку, померить длину траектории каждой мыши (S_1 и S_2) и разделить полученные длины. Так как мыши бегут с одинаковой скоростью отношение длин

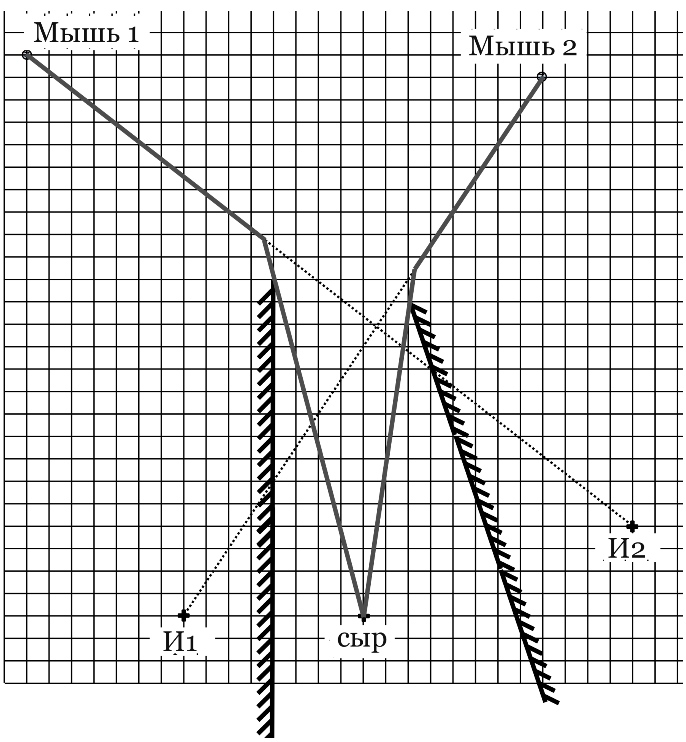


Рис. 5:

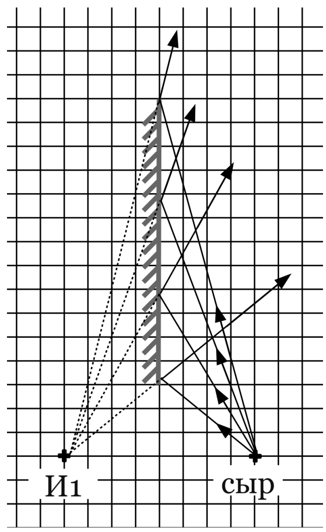


Рис. 6:

траекторий будет равно отношению времен, за которые мыши достигнут сыра.

Измерять длины трактрорий можно в любых единицах (миллиметрах или клеточках). Наши измерения дают

$$k = \frac{S_1}{S_2} \simeq 1.18$$

Погрешность аккуратно проведённых измерений может составлять около 5% (не более 5 миллиметров на 10 сантиметров). За правильный ответ засчитывались значения k, лежащие в интервале $[1.1, 1.25]$.

Ответ: Вторая мышь прибежит быстрее, время ее движения будет примерно в $k = 1.2$ раза меньше, чем у первой мыши. За правильный ответ засчитываются значения k, лежащие в интервале $[1.1, 1.25]$

Задача 2. II вариант.

Обозначим искомое давление на изобаре 1-2 через p, а искомый объём на изохоре 2-3 через V.

По условию работа, совершённая газом на изобаре 1-2, равна A. С другой стороны она равна площади под рассматриваемым куском изобары $p(V - V_1)$. Отсюда

$$p(V - V_1) = A \tag{6}$$

Запишем теперь условие, что линия 3-1 является изотермой

$$pV_1 = p_3 V. \tag{7}$$

Решим совместно систему уравнений (6, 7) относительно p и V. Например, разделим уравнение (6) на уравнение (7), исключив тем самым p,

$$\frac{V - V_1}{V_1} = \frac{A}{p_3 V} \qquad \Rightarrow \qquad V(V - V_1) = \frac{A}{p_3 V_1} \qquad \Rightarrow \qquad V^2 - V_1 V - \frac{A}{p_3 V_1} = 0.$$

Решая квадратное уравнение относительно V, находим

$$V = \frac{V_1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4A}{p_3 V_1}}\right).$$

Понятно, что ответ для V должен быть положительным, поэтому из двух корней следует оставить лишь положительный. Осталось лишь найти p из (7):

$$p = \frac{p_3 V}{V_1} = \frac{p_3}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4A}{p_3 V_1}}\right).$$

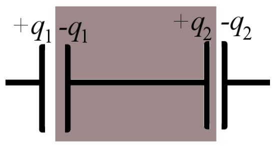
Ответ: Давление в точках 1 и 2 равно $p = p_3(1 + \sqrt{K})/2$, объём в точках 2 и 3 равен $V = V_1(1 + \sqrt{K})/2$, где $K = 1 + 4A/(p_3 V_1)$.

Задача 3. II вариант.

Пусть до замыкания ключа напряжение на конденсаторе $4C$ было U_1, а напряжение на конденсаторе C было U_2. Понятно, что $U_1 + U_2 = U$.

На последовательно соединённых конденсаторах, включенных в цепь постоянного напряжения, всегда устанавливаются равные заряды. Действительно, предположим, что это не так, и что заряды разные (q_1 и q_2, см. рис. 7). Рассмотрим выделенные серым на рисунке пластины. Они изолированы от источника, значит суммарный заряд их должен быть нулевым, т.е. $q_1 = q_2 = q$.

Если ключ разомкнут, в схеме имеется цепочка таких последовательно соединённых конденсаторов ёмкостью $4C$ и C (точнее, даже две таких цепочки). Каждую такую цепочку можно мысленно заменить ёмкостью C_0 — так, чтобы на еонденсаторе C_0 было такое же напряжение $U_1+U_2 = U$ как на рассматриваемой цепочке и такой же заряд $q = C_0U$. Тогда



$$U_1 + U_2 = U, \qquad \text{где} \qquad U_1 = \frac{q}{4C} \qquad U_2 = \frac{q}{C} \qquad U = \frac{q}{C_0},$$

Рис. 7:

откуда следует хорошо известная формула для последовательно соединённых конденсаторов

$$\frac{1}{4C} + \frac{1}{C} = \frac{1}{C_0}.$$

Это позволяет найти $C_0 = 4C/5$ и $q = C_0U = 4CU/5$.

Зная q, найдём

$$U_1 = \frac{q}{4C} = \frac{4CU}{5 \cdot 4C} = \frac{U}{5}, \qquad U_2 = \frac{q}{C} = \frac{4CU}{5C} = \frac{4U}{5}.$$

Когда ключ замыкают, перемычка с амперметром и сопротивлением соединяет собой точки с неравным потенциалом: точка между верхними конденсаторами имеет потенциал на U_1 меньше, чем крайняя левая точка схемы; точка между нижними конденсаторами имеет потенциал на U_2 меньше, чем крайняя левая точка схемы. Разность потенциалов на сопротивлении, таким образом, в момент замыкания ключа составляет $|U_1 - U_2| = 3U/5$, поэтому в первый момент потечёт ток

$$I = \frac{3U}{5R} = 12 \text{ mA}$$

Ответ: 12 миллиампер.

Задача 4. II вариант.

При выстреле ковбой вместе с каруселью приобретают скорость u и импульс Mu (мы обозначили через M суммарную массу ковбоя и обода карусели). Пуля при этом приобретает противоположный импульс, равный mV (V – горизонтальная скорость пули). По условию $m = \alpha M$.

Понятно, что импульсы Mu и mV связаны между собой и равны по модулю: по третьему закону Ньютона сила, с которой пуля в каждый момент толкает назад револьвер, равна силе, с которой револьвер толкает пулю; поэтому импульсы, которые приобретает под действием этих равных сил пуля и револьвер с ковбоем и каруселью в пренебрежении трением одинаковы. Итак,

$$Mu = mV \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{mV}{M} = \alpha V.$$

Так как пуля движется с начальной скоростью V, которая направлена горизонтально, за время t она пролетит по горизонтали путь $L = Vt$, а по вертикали опустится на $gt^2/2$. По условию L – расстоярие до мишени по горизонтали.

Во время второго выстрела карусель приобретет дополнительный импульс. Вылет пули будет осуществляться по тем же законам, но поскольку в начальный момент карусель двигалась с горизонтальной скоростью u, законы эти имеют такую же форму, если мы перейдём в систему отсчёта, где карусель не вращается. В неподвижной же системе отсчёта вторая пуля полетит после выстрела с горизонтальной скоростью $V-u$. По горизонтали она доберется до мишени за время

$$t' = \frac{L}{V-u} = \frac{Vt}{V-u} = \frac{t}{1-\alpha},$$

здесь мы учли связь $u = \alpha V$.

Понятно, что $t' > t$, то есть вторая пуля летит медленнее и дольше. Значит, и опустится за время полёта она сильнее, чем в первом случае – на расстояние $gt'^2/2$. По условию именно в этом месте расположен центр мишени.

Таким образом первая пуля прошла выше центра мишени на величину

$$\Delta x = \frac{gt'^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2}\left(\frac{t^2}{(1-\alpha)^2} - t^2\right) = \frac{gt^2}{2}\left(\frac{1-(1-\alpha)^2}{(1-\alpha)^2}\right) = \frac{gt^2\alpha}{2}\left(\frac{2-\alpha}{(1-\alpha)^2}\right).$$

Так как величина α мала по условию, в числителе можно отбросить α по сравнению с двойкой, а в знаменателе – α по сравнению с единицей.

<u>Ответ</u>: первая пуля прошла выше центра мишени на $\Delta x = gt^2\alpha$.

Задача 5. II вариант.

Грузы, расположенные на рычаге, скорее всего не будут уравновешены, $ML \neq ml$ (случай уравновешенных грузов надо рассматривать отдельно). Разумно предположить, что тот груз, который перевешивает на неподвижном рычаге, будет крутиться по нижней окружности, а второй – по верхней. Будем для определенности считать, что $ML > ml$, так что груз M расположился внизу.

На каждый из двух грузов будет действовать четыре силы: сила тяжести (Mg или mg – в зависимости от того, который груз рассматриваем), сила Лоренца ($F_{\Lambda\,1}$ или $F_{\Lambda\,2}$), сила со стороны стержня, направленная вдоль него (N_1 или N_2), сила со стороны стержня, направленная перпендикулярно стержню F_1 или F_2.

Силы на каждый из грузов представлены на рис. 8. Для определённости мы считаем, что нижний шарик движется "на нас", а верхний – "от нас". В случае, если система вращается в другую сторону, направления сил $F_{\Lambda\,1}$ или $F_{\Lambda\,2}$ изменятся по сравнению с рисунком на противоположные (этого же можно добиться, изменив направление B на противоположное). Направление центростремительных сил указано на рисунке жирными стрелками.

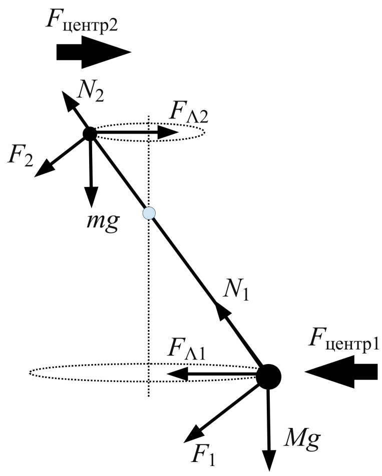


Рис. 8:

Так как каждый груз движется по горизонтальной окружности, сумма действующих на него сил должна складываться в результирующую, направленную к центру этой окружности (центростремительную силу):

$$M\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_1 + \vec{F}_{\Lambda\,1} = \vec{F}_{\text{центр}\,1}$$

$$m\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{\Lambda\,2} = \vec{F}_{\text{центр}\,2}$$

Удобно рассмотреть эти равенства в проекции на направление, перпендикулярное стержню:

$$Mg\sin\alpha + F_1 + F_{\Lambda\,1}\cos\alpha = F_{\text{центр}\,1}\cos\alpha,$$

$$-mg\sin\alpha - F_2 + F_{\Lambda\,2}\cos\alpha = F_{\text{центр}\,2}\cos\alpha,$$

здесь мы обозначили искомый угол между стержнем и вертикалью через α.

В последних формулах силы N_1 и N_2 не дали вклада, так как мы рассмотрели перпендикулярное им направление. Силы же F_1 и F_2 связаны между собой соотношением $F_1L = F_2l$. Действительно, такие же по величине силы и противоположные по направлению силы действуют со стороны грузов на стержень. Стержень же закреплён на шарнире и должен пребывать в равновесии. Значит моменты сил F_1 и F_2 должны быть скомпенсированы. Это соотношение позволит нам исключить из рассматриваемой системы силы F_1 и F_2. Домножим первое уравнение на L, второе на l, и сложим уравнения друг с другом. Вклады $F_1L - F_2l$ сократятся, останется

$$(ML - ml)g\sin\alpha + (F_{\Lambda\,1}L + F_{\Lambda\,2}l)\cos\alpha = (F_{\text{центр}\,1}L + F_{\text{центр}\,2}l)\cos\alpha. \quad (8)$$

Теперь осталось только выразить силу Лоренца и центростремительную силу через параметры системы. Для этого введём радиус окружности, по которой вращается каждый груз,

$$R_1 = L\sin\alpha, \qquad R_2 = l\sin\alpha$$

и вспомним, что скорость движения груза равна произведению угловой скорости ω на этот радиус. Для силы Лоренца

$$F_{\Lambda\,1} = QB\omega L\sin\alpha, \qquad F_{\Lambda\,2} = qB\omega l\sin\alpha.$$

Для центростремительной силы

$$F_{\text{центр}\,1} = M\omega^2 L\sin\alpha, \qquad F_{\text{центр}\,2} = m\omega^2 l\sin\alpha.$$

Подставляя эти силы в (8), получим

$$(ML-ml)g\sin\alpha + B\omega\sin\alpha(QL^2+ql^2)\cos\alpha = \omega^2\sin\alpha(ML^2+ml^2)\cos\alpha.$$

У этого уравнения имеется, во-первых, решение $\sin\alpha = 0$, а во-вторых, корни уравнения

$$(ML-ml)g + B\omega(QL^2+ql^2)\cos\alpha = \omega^2(ML^2+ml^2)\cos\alpha, \tag{9}$$

из которого легко выразить

$$\cos\alpha = \frac{(ML-ml)g}{\omega^2(ML^2+ml^2) - B\omega(QL^2+ql^2)} = \frac{(3L-l)mg}{m\omega^2(3L^2+l^2) - qB\omega(2L^2+l^2)}. \tag{10}$$

Последнее уравнение решается только если

$$0 \le \frac{(ML-ml)g}{\omega^2(ML^2+ml^2) - B\omega(QL^2+ql^2)} \le 1.$$

Знак при слагаемом с B может меняться в зависимости от того, по или против часовой стрелки вращаются грузы. Знаменатель в рассматриваемой дроби при достаточно малых ω может быть отрицательным, или слишком малым, чтобы наше неравенство выполнялось. Тогда реализуется решение $\sin\alpha = 0$ (оно же является устойчивым).

С ростом ω у уравнения (10) появляется нетривиальное устойчивое решение, в то время как $\alpha = 0$ становится неустойчивым.

Если заряды вращаются как мы предположили (нижний на нас, верхний – от нас), это происходит при

$$(ML-ml)g = \omega^2(ML^2+ml^2) - B\omega(QL^2+ql^2),$$

т.е. при критическом значении ω_{kp}, найденной из квадратного уравнения

$$\omega^2(ML^2+ml^2) - B\omega(QL^2+ql^2) - (ML-ml)g = 0, \qquad \Rightarrow$$

$$\omega_{kp} = \frac{B(QL^2+ql^2) + \sqrt{B^2(QL^2+ql^2)^2 + 4(ML^2+ml^2)(ML-ml)g}}{2(ML^2+ml^2)} =$$

$$= \frac{qB(2L^2+l^2) + \sqrt{q^2B^2(2L^2+l^2)^2 + 4m^2(3L^2+l^2)(3L-l)g}}{2m(3L^2+l^2)}$$

(отрицательное решение для ω_{kp} отброшено).

Дальнейший рост ω при значениях больших ω_{kp} приведёт к росту знаменателя в (10) и, соответственно, увеличению равновесного угла α.

Если заряды вращаются наоборот (нижний от нас, верхний – на нас), стержень остаётся вертикальным вплоть до угловых скоростей

$$\tilde{\omega}_{kp} == \frac{-qB(2L^2+l^2) + \sqrt{q^2B^2(2L^2+l^2)^2 + 4m^2(3L^2+l^2)(3L-l)g}}{2m(3L^2+l^2)}$$

(данное решение проще всего получить, заменив в ω_{kp} знак у слагаемых с B.

В случае, когда исходно невращающиеся грузы уравновешены на шарнире (когда $ML = ml$) угол в уравнении (9) вообще сокращается, так что равновесие имеет место при любом расположении стержня, однако частота вращения при этом единственно возможная. Можно, однако, показать. что устойчивое вращение происходит лишь при $\alpha = 0$ и $\alpha = 90^\circ$. Для этого следует при произвольном α рассмотреть малое изменение α на $\Delta\alpha$ и убедиться, что силы в (10) изменяются так, чтобы усилить отклонение стержня.

Ответ: Если заряды вращаются так – нижний на нас, верхний – от нас, при $\omega < \omega_{kp}$ стержень вертикален, при больших значениях угол задается соотношением (10).

Если заряды вращаются в обратную сторону, при $\omega < \tilde{\omega}_{kp}$ стержень вертикален, а при больших значениях угол задается соотношением (10) в котором следует изменить знак у B.

В случае, когда $3L = l$, стержень находится в безразличном неустойчивом равновесии и может вращаться под любым углом. Устойчивое положение стержня в этом случае – вертикальное либо горизонтальное.